|  |  |
| --- | --- |
|  | Francesco Cavallini  Matricola: 920835  f.cavallini8@campus.unimib.it  Corso di studi di Informatica Magistrale |
| Università degli studi Milano Bicocca  Milano, Padiglione U24  Ottobre, 2024 |  |

|  |  |
| --- | --- |
|  | |
| Compressione di immagini tramite la DCT  Metodi del Calcolo Scientifico  Relazione Progetto 2  **Consegna:**  **“““**  Lo scopo di questo progetto è di utilizzare l’implementazione della DCT2 in un ambiente open source e di studiare gli effetti di un algoritmo di compressione tipo jpeg (senza utilizzare una matrice di quantizzazione) sulle immagini in toni di grigio.  **”””**  Riferimenti : | |
| Repository git-hub: | https://github.com/VR3ED/Easy\_Matrix |

Sommario

[0. Introduzione 3](#_Toc13)

[0.1. Obbiettivi 3](#_Toc14)

[0.2. Scelte implementative 4](#_Toc15)

[1. Parte-1: Sviluppo DCT & DCT2 5](#_Toc16)

[1.1. Requisiti tecnici: 5](#_Toc17)

[1.2. Le basi per lo sviluppo: cosa ci aspettiamo: 5](#_Toc18)

[1.3. Le basi per lo sviluppo: come è strutturato il codice: 6](#_Toc19)

[1.4. Utilss.py: Implementazione DCT: 8](#_Toc20)

[1.5. Utilss.py: Implementazione DCT2: 10](#_Toc21)

[1.6. Utilss.py: Metodi di libreria per DCT e DCT2: 12](#_Toc22)

[1.7. Analisi dei risultati e conclusioni: 13](#_Toc23)

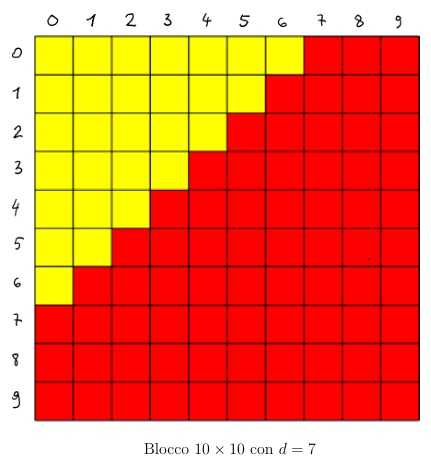
[2. Parte-2: Software con interfaccia grafica 15](#_Toc24)

# 0. Introduzione

## 0.1. Obbiettivi

Come definito nella pagina iniziale, l’obbiettivo del progetto è quello di creare un implementazione custom della DCT2. In particolare il lavoro è suddiviso in 2 parti in cui abbiamo:

* **Parte 1**: Implementare la DCT2 come spiegata a lezione in un ambiente open source a vostra scelta e confrontare i tempi di esecuzione con la DCT2 ottenuta usando la libreria dell’ambiente utilizzato (che si presuppone essere nella versione FFT)
* **Parte 2**: Creare un software con interfaccia grafica che permetta di suddividere l’immagine in blocchi quadrati di pixel di dimensioni partendo in alto a sinistra, scartando gli avanzi; poi, per ogni blocco eseguire le seguenti operazioni:
  + applicare la DCT2 (della libreria): ;
  + eliminare le frequenze con (assumendo che le frequenze partano da 0: se le elimino tutte, se elimino solo la più alta, cioè quella con. In sostanza bisogna eliminare i coefficienti in frequenza a destra della diagonale individuata dall’intero d, come esemplificato qui sotto:



abbiamo e . I coefficienti da eliminare sono indicati in rosso.

* applicare la DCT2 inversa all’array così modificato:
* arrotondare all’intero più vicino, mettere a zero i valori negativi e a 255 quelli maggiori di 255 in modo da avere dei valori ammissibili (1 byte);

Una volta fatto questo per ogni blocco si rimette insieme l’immagine mettendo assieme i blocchi ottenuti, mettendoli nell’ordine giusto e paragonare l’immagine ottenuta con l’originale di partenza.

## 0.2. Scelte implementative

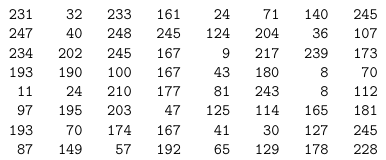
Si sceglie di utilizzare il linguaggio python per lo sviluppo di entrambe le parti del progetto, utilizzando visual studio code come ambiente di sviluppo. Le motivazioni dietro a questa scelta sono:

* Vasta disponibilità di librerie open source per i paragoni necessari ad altre librerieafici
* Vasta gamma di librerie per lo sviluppo di grafici
* Sintassi semplice ed intuitiva, renderà le fasi di analisi del codice più scorrevoli, e, allo stesso tempo, diversamente da C# (il linguaggio utilizzato per lo sviluppo del progetto 1) questo linguaggio è più adatto alla stesura di codice in ambito di calcolo scientifico.

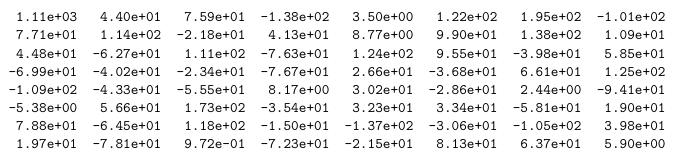
# 1. Parte-1: Sviluppo DCT & DCT2

## 1.1. Requisiti tecnici:

I requisiti necessari per lo sviluppo della prima parte sono quelli di prestare molta attenzione a come viene scalata la DCT2 (o la DCT). Come caso test è necessario verificare che il seguente blocchetto 8×8:



venga trasformato in questo modo dalla DCT2:



È inoltre necessario controllare per la DCT monodimensionale che la prima riga del blocchetto 8×8 precedentemente mostrato venga trasformata in:



## 1.2. Le basi per lo sviluppo: cosa ci aspettiamo:

Per questo progetto, analizzeremo le prestazioni della nostra implementazione della DCT2 rispetto a quella fornita da una libreria di riferimento, concentrandoci sui tempi di esecuzione e sulle complessità teoriche dei due approcci. In particolare, studieremo come i tempi di calcolo variano al crescere delle dimensioni della matrice fornita in input.

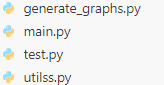
Ci si aspetta che la nostra implementazione manuale della DCT2 dovrebbe presentare una complessità temporale proporzionale a , mentre la versione basata su una libreria ottimizzata, tipicamente costruita utilizzando FFT, dovrebbe raggiungere una complessità . Questa differenza nasce dalle diverse strategie algoritmiche impiegate:

* la nostra implementazione si basa su una definizione diretta della DCT2,
* le librerie ottimizzate sfruttano algoritmi avanzati per ridurre il numero di operazioni necessarie.

Nel corso dell'analisi, confronteremo i tempi di esecuzione ottenuti per matrici di dimensioni crescenti, valutando in che misura i risultati sperimentali confermano le complessità teoriche attese.

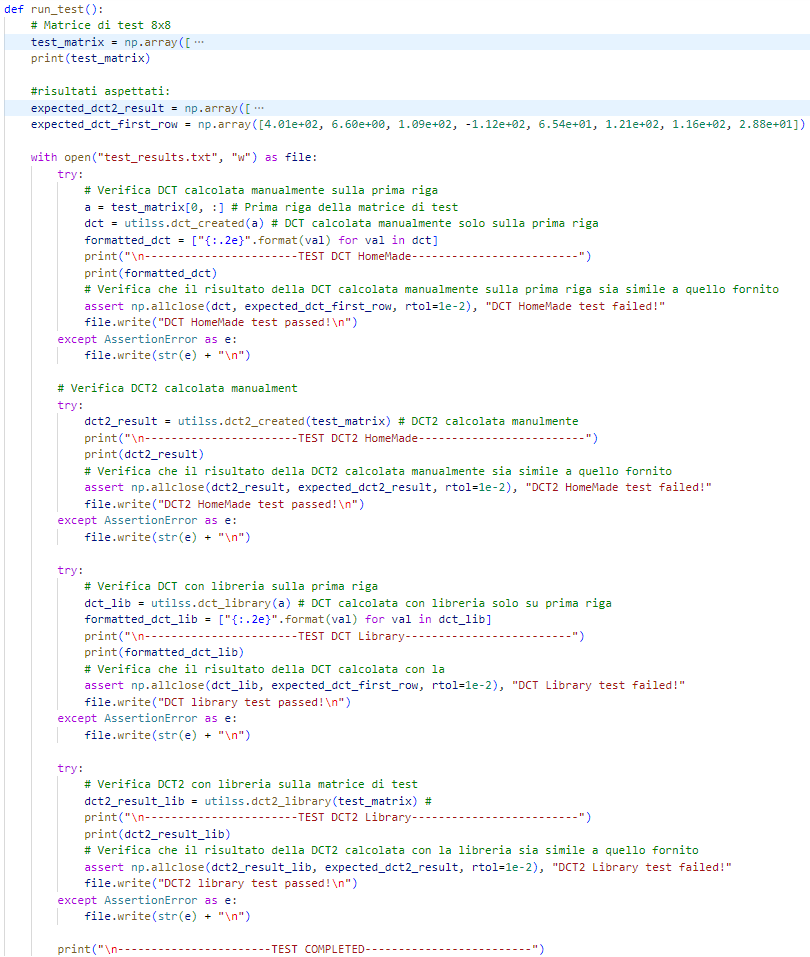
## 1.3. Le basi per lo sviluppo: come è strutturato il codice:

La parte 1 è stata sviluppata suddividendo il codice nelle seguenti classi:



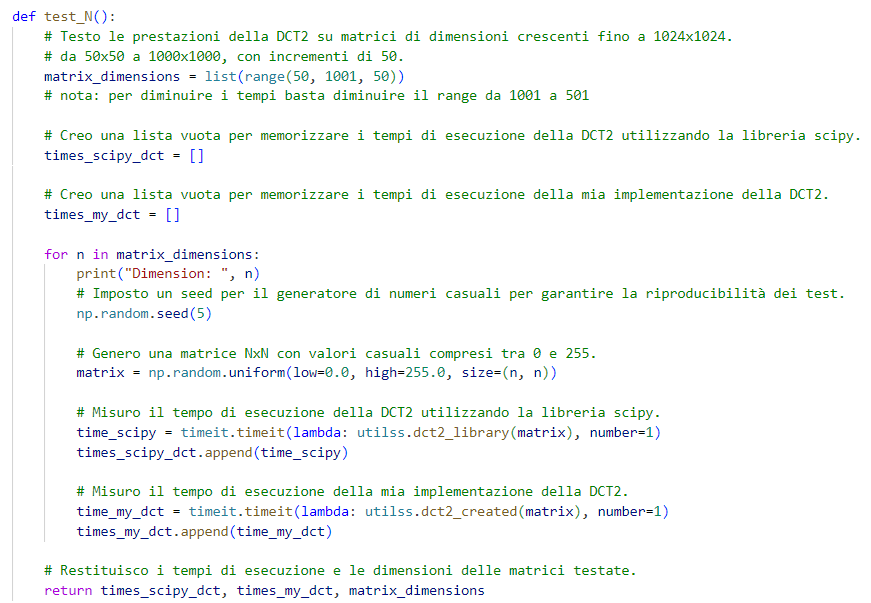
Dove abbiamo che:

test.py: Implementa i requisiti di controllo sull’accuratezza precedentemente accennati:



I commenti nel codice mostrato dovrebbero fornire tutte le informazioni necessarie per individuare tutti i test che vengono svolti per rispettare i requisiti tecnici imposti dalla consegna. Inoltre si può visualizzare che ogni test è inserito all’interno di un try-catch se il test concluderà con successo allora verrà scritto in un file txt che il test è stato completato correttamente, altrimenti, verrà scritto il messaggio di errore.

Sempre nel file tests.py viene poi implementato un altro metodo per misurare il tempo necessario per eseguire computazioni di DCT e DCT2 su matrici di grandezze progressivamente sempre più grandi (da ad ):



Anche qui abbiamo che i commenti sono abbastanza autoesplicativi, tutto quello che succede è l’esecuzione ricorsiva di metodi di DCT2 (creato a mano e di libreria) cambiando ad ogni iterazione la grandezza di . Ad ogni iterazione viene anche misurato il tempo di esecuzione di modo da poterlo graficare in seguito.

main.py: Avvia semplicemente i test definiti nel file test.py

generate\_graphs.py: Contiene una sola funzione che colleziona i timestamps di esecuzione forniti dai metodi in test.py e plotta un grafico per confrontare le prestazioni temporali della Trasformata Discreta del Coseno (DCT) e della Trasformata Discreta del Coseno bidimensionale (DCT2) tra due implementazioni: una fornita dalla libreria SciPy e una sviluppata manualmente. Nota che di questo file non verrà mostrato il codice in quanto non rilevante ai fini della relazione, ma verranno mostrati i grafici da essa prodotti.

utilss.py: Cuore del progetto, contiene infatti i due metodi creati manualmente per l’implementazione di DCT e DCT2. Per ciascuna di queste verrà dedicato un capitolo a parte che ne spiega l’implementazione. Questo file contiene inoltre altri 2 metodi wrapper che servono a chiamare la versione da libreria (Scipy) delle implementazioni di DCT e DCT2.

## 1.4. Utilss.py: Implementazione DCT:

L’idea di base per la realizzazione di DCT è creare una trasformata matematica utilizzata per rappresentare un segnale discreto (dal dominio del tempo) come una somma di funzioni coseno (conversione al dominio della frequenza) con pesi opportuni. Si può usare poi questo principio per scartare le parti con minor quantitativo informativo per creare compressioni di segnali ed immagini. Inoltre DCT è un’operazione reversibile tramite l’operazione IDCT, tuttavia, la ricostruzione non è perfetta a causa di un troncamento delle frequenze che avviene durante la trasformazione DCT. Più nello specifico abbiamo che la DCT funziona secondo questo principio:

1. **Calcolo vettore :** Il calcolo di α è semplicemente una fase di normalizzazione necessaria per costruire la matrice di trasformazione della DCT seguendo la definizione teorica. Questo vettore contiene infatti i fattori di normalizzazione che dipendono dalla posizione (indice ) nella matrice di trasformazione:
   * Per : abbiamo che
   * Per : abbiamo che
2. **Calcolo DCT tramite matrice di trasformazione (T)**: Abbiamo che DCT () utilizza funzioni coseno con frequenze diverse per rappresentare il segnale, ossia abbiamo per ogni vettore che:

Dove Rappresenta il campione del segnale originale (nel dominio spazio/tempo)

Per semplicità implementativa possiamo però dividere questa trasformazione in:

1. **Calcolare la matrice di trasformazione T**: Ossia una matrice unicamente composta da vettori riga () che rappresentano funzioni coseno a diverse frequenze; ogni posizione singola di questa matrice è calcolata in questo modo:

Nota che la parte della formula applica la trasformazione cosinuoidale, utilizzando il vettore assicuriamo che la trasformazione sia ortogonale; ossia:

* + - I vettori riga saranno mutuamente ortogonali: Il prodotto scalare tra due vettori riga e della matrice deve essere zero per . Questo garantisce che le frequenze diverse (associate a e ) siano indipendenti l'una dall'altra.
    - I vettori riga saranno normalizzati: Il prodotto scalare di ciascun vettore con sé stesso deve essere

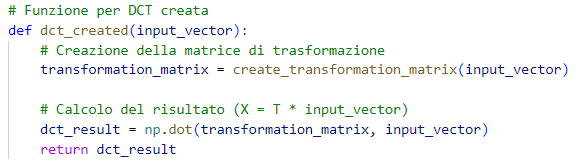
1. **Applicare la trasformazione al segnale originale**: ossia moltiplicare il segnale originale per il vettore di trasformazione:

Dove contiene i coefficienti della DCT, che rappresentano le ampiezze delle diverse frequenze.

Se andiamo a visualizzare quindi l’implementazione del metodo di creazione manuale della DCT all’interno del file utilss.py possiamo osservare che verranno applicati gli stessi principi teorici appena descritti:

Si decide di esportare il calcolo di e di in un altro metodo a parte

Applica la matrice di trasformazione al segnale originale:



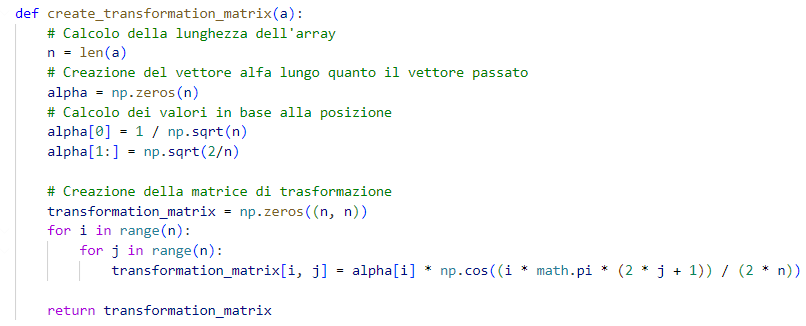
Come possibile osservare il calcolo di e di viene spostato in un metodo diverso (questo semplicemente per migliorare la leggibilità del codice) , questo metodo è il seguente:

Calcolo matrice T cella per cella:

Calcolo di con:

•

• (per i))



Svolgendo i calcoli nell’ordine di esecuzione abbiamo quindi:

1. Calcolo di
2. Calcolo di
3. Applicazione di al segnale originale

Questa serie di operazioni corrisponde quindi perfettamente con la teoria precedentemente descritta.

## 1.5. Utilss.py: Implementazione DCT2:

La DCT2 bi-dimensionale (2D) è un'estensione della DCT al dominio delle matrici. Il principio fondamentale della DCT2 è che concentra la maggior parte dell'informazione utile nei coefficienti a bassa frequenza (tipicamente in prossimità dell'angolo in alto a sinistra della matrice trasformata), rendendo possibile una significativa riduzione della dimensionalità del dato e una compressione efficace. Si ha infatti che la matrice risultante da dalla trasformazione trasfoallrisultatrasDCT2 () viene calcolata applicando separatamente DCT lungo le righe e le colone alla matrice originale, ossia:

Applicazione DCT sulle righe

Applicazione DCT sulle colonne

Dove:

* è il valore dell'elemento della matrice di input.
* e sono le dimensioni della matrice di input.
* Insieme a sono i 2 fattori di normalizzazione per le rispettive DCT.

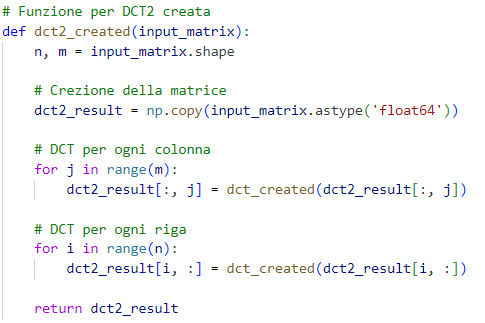
Essendo questa trasformazione direttamente derivata da DCT è facile capire che anche in questo caso è reversibile (mantenendo sempre il problema di ricostruzione perfetta a causa di un troncamento delle frequenze che avviene durante la trasformazione DCT).

È fondamentale evidenziare che la tecnica appena descritta, pur essendo efficace, non corrisponde a quella impiegata dal formato JPEG per comprimere le immagini. Questo perché alcune operazioni critiche potrebbero generare distorsioni e artefatti nella ricostruzione finale. Il formato JPEG, invece, utilizza strategie specifiche per superare tali problematiche, garantendo una compressione efficiente senza compromettere eccessivamente la qualità dell'immagine.

**NOTA**: DCT2 nel formato JPEG

Avendo quindi già spiegato il funzionamento della funzione DCT nel capitolo precedente diventa molto facile spiegare il codice generato per l’implementazione di DCT2

Se andiamo quindi a visualizzare quindi l’implementazione del metodo di creazione manuale della DCT2 (sempre all’interno del file utilss.py) possiamo osservare che verranno applicati gli stessi principi teorici appena descritti:



La DCT2 implementata nel codice antecedente segue una strategia "a separazione di variabili". Ossia viene sfruttata la linearità della trasformazione consentendo di ridurre il problema bidimensionale in **due trasformazioni monodimensionali** consecutive:

1. Prima si calcola la DCT lungo una dimensione (colonne).
2. Poi si calcola la DCT lungo l'altra dimensione (righe).

Questo approccio è computazionalmente efficiente perché riduce la complessità computazionale rispetto al calcolo diretto della DCT2, specialmente per matrici di grandi dimensioni. Abbiamo infatti che la definizione diretta della DCT2 per una matrice è:

Questo implica di avere due somme nidificate () su tutte le celle della matrice. Dove ogni somma richiede moltiplicazioni e somme per calcolare un singolo elemento ​. Per calcolare tutti i coefficienti della DCT2, la complessità totale diventa:

Invece, utilizzando il principio della scomposizione di due operazioni lineari abbiamo che:

* Per la trasformazione lungo le colonne: per una colonna sola richiede operazioni, quindi per tutte le colonne:
* Per la trasformazione lungo le righe: analogamente per una riga sola richiede operazioni, quindi per tutte le colonne:

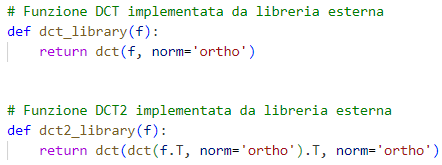
Avendo quindi che la complessità totale utilizzando questo metodo è:  
  
Avendo quindi che questa strategia è computazionalmente più efficiente (e rispecchia anche la complessità di implementazione che ci aspettavamo all’inizio)

**NOTA**: matrici quadrate

Nota che per entrambi i risultati finali se operiamo con una matrice quadrata allora i “” diventano “”

## 1.6. Utilss.py: Metodi di libreria per DCT e DCT2:

Come già anticipato si usano i metodi della libreria SciPy per avere un paragone con altre implementazioni di DCT e DCT2, di seguito vengono mostrati i metodi wrapper che chiamano le funzioni di libreria:



La funzione DCT2 prende in input gli stessi parametri della funzione DCT, ma viene richiamata due volte per creare la matrice bidimensionale sul trasposto della matrice fornita in input. Si da in pasto al metodo DCT2 la matrice trasposta appunto per creare un analogia con il codice scritto manualmente: qui, la trasposizione fa sì che la prima trasformazione venga applicata lungo le righe (tramite ), e la seconda lungo le colonne (invertendo con un altro ). Se non si usasse la trasposizione T nella funzione dct2\_library, la trasformazione sarebbe applicata solo lungo una dimensione della matrice (ad esempio, solo lungo le righe o solo lungo le colonne), anziché su entrambe le dimensioni.

**NOTA**: Coefficienti di normalizzazione

Si vuole far notare però che questa libreria implementa il fattore di scaling α in maniera analoga da come lo abbiamo appena visto dalle descrizioni teoriche che abbiamo dato nelle sezione [1.4](#_1.4._Utils) ma in maniera diversa da come abbiamo visto l’implementazione teorica della DCT.

Abbiamo infatti visto durante le lezioni teoriche che la formula per la DCT sarebbe:  
  
dove: (con vettore base della DCT)

* se allora (che possiamo trasformare quindi in moltiplicazione per )
* se allora (che possiamo trasformare quindi in moltiplicazione per )

A questi noi scegliamo di aggiungere aggiungela radice quadrata per fare normalizzazione, senza normalizzazione il prodotto scalare di un vettore base con sé stesso sarebbe proporzionale a N. La radice quadrata viene utilizzata per compensare questa dipendenza.

Ma se andiamo ad esplorare la [documentazione di SciPyci](https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.fftpack.dct.html) (sotto dct type2 e norm=ortho) possiamo vedere che questa implementa il calcolo dei coefficienti di normalizzazione in maniera leggermente diversa, ma molto simile, a quella che abbiamo deciso di applicare:

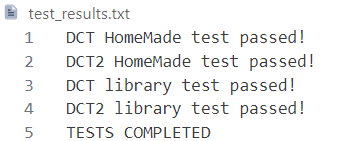
* se allora (trasformabile quindi in moltiplicazione per )
* se allora (trasformabile quindi in moltiplicazione per )

## 1.7. Analisi dei risultati e conclusioni:

Una volta definiti tutti i metodi utilizzati per l’implementazione di DCT2 possiamo dunque eseguirli.

**1.7.1. Esecuzione test per i requisiti tecnici forniti:**

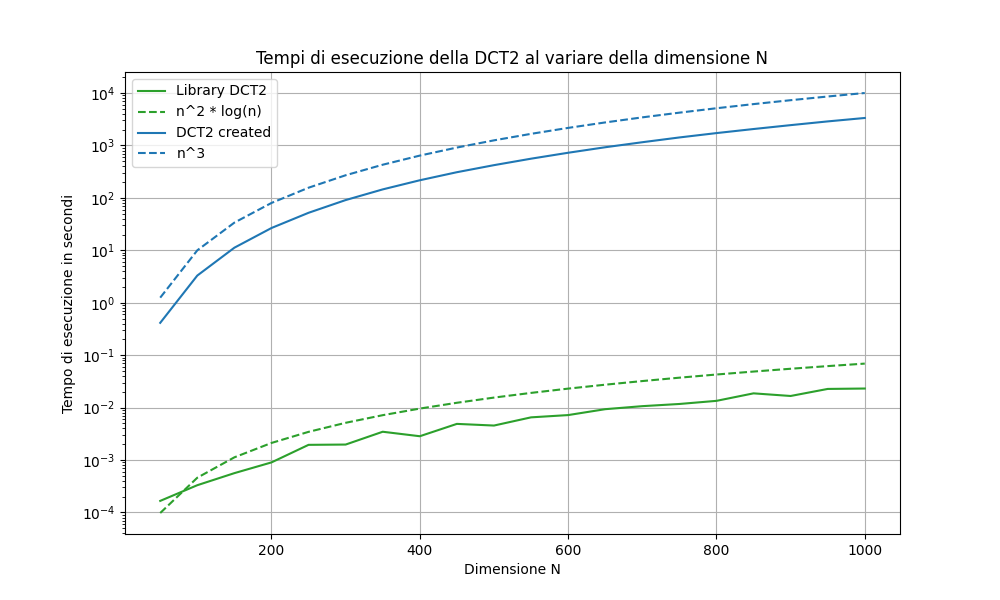
Abbiamo precedentemente mostrato nella sezione [1.3](#_1.3._Le_ba) la funzione run\_test() (all’interno del file test.py). Questa funzione è incaricata di controllare il rispetto dei requisiti tecnici forniti dalla consegna. Abbiamo infatti che per ogni test eseguito viene scritta una riga di codice all’interno del file “test\_results.txt”, di seguito ne vengono mostrati i risultati:



Come possibile visualizzare tutti i test eseguiti vengono eseguiti correttamente (nonostante la piccola differenza di fattore di scala precedentemente notata). Di conseguenza possiamo affermare con certezza che i risultati prodotti rispettino i requisiti di accuratezza richiesti da consegna.

**1.7.2. Esecuzione test per verificare i tempi di esecuzione:**

Sempre nel capitolo [1.3](#_1.3._Le_ba) abbiamo precedentemente mostrato il funzionamento della funzione test\_N che permette di misurare il tempo necessario per eseguire computazioni di DCT2 (sia la versione scritta manualmente che quella di libreria) su matrici di grandezze progressivamente più grandi (da ad ). Avevamo anche accennato poi alla presenza di un metodo presente nel file generate\_graphs.py che permette di prendere i risultati dei tempi di computazione calcolati con il metodo precedente e mostrarli in un grafico. In seguito all’esecuzione di entrambi i metodi questi sono i risultati riportati:



Analizzando i risultati riportati, si osserva che il tempo di esecuzione delle implementazioni della DCT segue, segue un andamento molto simile a quello di ; in maniera allineata a ciò che avevamo previsto nei capitoli precedenti. In particolare, l’utilizzo del metodo di libreria consente un notevole miglioramento delle prestazioni per le matrici nella DCT2. Infatti, come anticipato, questo metodo segue un andamento di . Abbiamo quindi che per matrici di piccole dimensioni (), i tempi di esecuzione delle due implementazioni sono simili: essendo le y in scala logaritmica abbiamo che per entrambi i metodi è necessario meno di un secondo (circa) per calcolare entrambi i metodi. Ovviamente però diventa necessario utilizzare il metodo di libreria per calcolare matrici di dimensioni in quanto la differenza tra i due metodi iniza a diventare molto più accennata.

# 2. Parte-2: Software con interfaccia grafica